Colegio N° 5051 "Ntra. Sra. de La Merced"

Área: **Matemática** **Año: 4º C.O** **División: Todas** **Turno**: **Mañana y Tarde**

"Planificación de Clases" **Modalidad:** Por Plataforma institucional

Docentes:

Marcelo Caliva (4º 1º y 4º 2º- TM) **Contacto**: **maraguscaliva@hotmail.com**

Mónica Guaymás (4º 3º y 4º 4º- TM) **Contacto**: **monicamarcela75g@gmail.com** - **(3874430893)**

Azucena Palacios (4º 2º y 4º 3º- TT) **Contacto**: **profpalaciosmatematica@gmail.com** – **(3874077226)**

Víctor Chocobar (4º 1º- TT) **Contacto**: **vchocobar5@gmail.com**

Trabajo Nº 5 **Tiempo**: 2 semanas

Tema: Números complejos: Suma, resta, multiplicación y división de complejos. Potencias de la unidad imaginaria.

Parte Teórica

Operaciones con números complejos

Suma y resta de números complejos

La suma o resta de dos complejos es otro complejo que resulta de sumar o restar las partes reales e imaginarias entre sí.

Suma

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$

Ejemplo: $\mathbf{(2 + 3i) + (-8 + 4i) =}$

$\mathbf{(2 - 8) + (3 + 4)\,i =}$

$\mathbf{-6 + 7i}$

Resta

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i$

Ejemplo: $\mathbf{(1 - 7i) - (6 - 2i) =}$

$\mathbf{(1 - 6) + (-7 + 2)\,i =}$

$\mathbf{-5 - 5i}$

- **Para efectuar la suma o resta de números complejos <u>también podemos eliminar los paréntesis</u>, luego asociamos las partes reales y las partes imaginarias y resolvemos.**

$\mathbf{(-7 - 5i) + (3 + 6i) =}$

$\mathbf{-7 - 5i + 3 + 6i =}$ ← Elimino los paréntesis. →

$\mathbf{\underbrace{-7 + 3}\ \underbrace{-\,5i + 6i} =}$ ← Agrupo la parte real, la parte imaginaria y resuelvo. →

$\mathbf{-4 + i}$

$\mathbf{(5 - 4i) - (9 + 7i) =}$

$\mathbf{5 - 4i - 9 - 7i =}$

$\mathbf{\underbrace{5 - 9}\ \underbrace{-\,4i - 7i} =}$

$\mathbf{-4 - 11i}$

https://www.youtube.com/watch?v=b0FFMwax2Oc (suma y resta de números complejos)

Potencias de la unidad imaginaria

Recordemos que la unidad imaginaria se define como el número complejo i tal que $i^2 = -1$. Aplicando las propiedades de la potenciación, se puede hallar la potencia enésima de la unidad imaginaria.

$i^0 = \mathbf{1}$ (por convención)	$i^4 = i^3 \,.\, i = -i \,.\, i = -i^2 = -(-1) = \mathbf{1}$	$i^8 = i^7 \,.\, i = -i \,.\, i = -i^2 = -(-1) = \mathbf{1}$
$i^1 = \mathbf{i}$	$i^5 = i^4 \,.\, i = 1 \,.\, i = \mathbf{i}$	$i^9 = i^8 \,.\, i = 1 \,.\, i = \mathbf{i}$
$i^2 = \mathbf{-1}$ (por definición)	$i^6 = i^5 \,.\, i = i \,.\, i = i^2 = \mathbf{-1}$	$i^{10} = i^9 \,.\, i = i \,.\, i = i^2 = \mathbf{-1}$
$i^3 = i^2 .\, i = -1 .\, i = \mathbf{-i}$	$i^7 = i^6 \,.\, i = -1 \,.\, i = \mathbf{-i}$	$i^{11} = i^{10} \,.\, i = -1 \,.\, i = \mathbf{-i}$

Y así sucesivamente se observa que:

$$i^0 = i^4 = i^8 = 1$$
$$i^1 = i^5 = i^9 = i$$
$$i^2 = i^6 = i^{10} = -1$$
$$i^3 = i^7 = i^{11} = -i$$

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$

RECUERDA ESTAS POTENCIAS

Los resultados de la potencia de i son **1, i , – 1 , – i y se repiten periódicamente**.

$i^n = i^{4c+r}$

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & c \end{array}$$

El resultado de elevar la unidad imaginaria a un número natural **n**, es igual a elevarlo al resto de la división entera entre **n** y **4**. Ejemplos:

a) $i^{85} = i^1 = i$

$$\begin{array}{r|l} 85 & 4 \\ \hline 1 & 21 \end{array}$$

b) $i^{143} = i^3 = -i$

$$\begin{array}{r|l} 143 & 4 \\ \hline 3 & 35 \end{array}$$

c) $i^{108} = i^0 = 1$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 4 \\ \hline 0 & 27 \end{array}$$

https://www.youtube.com/watch?v=gQ6JbbmYMm8 (potencia de la unidad imaginaria)

Multiplicación de números complejos

Para multiplicar dos números complejos, **se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación** con respecto a la suma y/o resta.

$(a + bi) \,.\, (c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2 = ac + adi + cbi + bd.(-1) = ac + adi + cbi - bd = (ac-bd) + (ad+cb)i$

Ejemplo:

$$\mathbf{(2 + 5i) \,.\, (-4 + 2i) =}$$

$\mathbf{2 \,.\, (-4) + 2 \,.\, 2i + 5i \,.\, (-4) + 5i \,.\, 2i =}$

$\mathbf{-8 + 4i - 20i + 10\, i^2 =}$

$\mathbf{-8 + 4i - 20i + 10 \,.\, (-1) =}$

$\mathbf{-8 + 4i - 20i - 10 =}$

$\mathbf{-8 - 10 + 4i - 20i =}$

$\mathbf{-18 - 16i}$

- Aplica la propiedad distributiva.
- Resuelve los productos.
- $i^2 = -1$, se reemplaza
- Agrupa la parte real y la parte imaginaria y resuelve.

https://www.youtube.com/watch?v=38DPFbTKUpQ&list=LLVJSbyXml6BJIHUtJBLtftw&index=854

(multiplicación de números complejos)

Producto de complejos conjugados

Una multiplicación especial es la de números complejos conjugados (a+bi) y (a−bi). Su resultado es siempre el número real, $a^2 + b^2$

$$\boxed{(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2}$$

$(7+2i).(7-2i) = 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53$ $(-2-5i).(-2+5i) = (-2)^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$

División de números complejos

Para dividir dos números complejos se multiplica al dividendo y al divisor por el conjugado del divisor y luego se resuelven las operaciones resultantes.

Ejemplos:

$$\frac{1+3i}{2-4i} = \frac{(1+3i)}{(2-4i)} \cdot \frac{(2+4i)}{(2+4i)} = \frac{2+4i+6i+12i^2}{2^2+4^2} = \frac{2+4i+6i+12.(-1)}{4+16} = \frac{2+4i+6i-12}{20} =$$

$$\frac{-10+10i}{20} = -\frac{10}{20} + \frac{10}{20}\,i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$$

$$\frac{5-2i}{-6i} = \frac{(5-2i)}{-6i} \cdot \frac{6i}{6i} = \frac{5\,.6i-2i\,.6\,i}{6^2} = \frac{30i-12\,i^2}{36} = \frac{30\,i-12\,.(-1)}{36} = \frac{30i+12}{36} =$$

$$\frac{12}{36} + \frac{30}{36}\,i = \frac{1}{3} + \frac{5}{6}\,i$$

https://www.youtube.com/watch?v=XV5buDdtUEU (división de complejos)

https://www.youtube.com/watch?v=skL_IGo2TyE (división de complejos)

Cuadrado de un complejo

Para calcular el cuadrado de un numero complejo lo haremos usando la definición **$a^2 = a\ .\ a$**

Ejemplo:

$(7 - 3i)^2 = (7 - 3i)\ .\ (7 - 3i) =$

$49 - 21i - 21i + 9\ i^2 =$

$49 - 21i - 21i + 9\ .\ (-1) =$

$49 - 21i - 21i - 9 =$

$40 - 42i$

Parte Práctica

1) Resolver cada una de las operaciones.

a) $(3 + 2i) + (5 + 3i) =$ **b)** $(3 + 5i) - (5 - 3i) =$ **c)** $(5 - i) - (8 - 2i) + (3 - i) =$

d) $(4 + 3i) + (2 + 5i) =$ **e)** $(7 - 4i) - (-6 + 4i) =$ **f)** $(9 + 7i) - (-9 + 7i) + (-18 + i) =$

2) Calcular cada potencia de i.

a. $i^{46} = \boxed{}$ **b.** $i^{84} = \boxed{}$ **c.** $i^{21} = \boxed{}$ **d.** $i^{39} = \boxed{}$ **e.** $i^{238} = \boxed{}$ **f.** $i^{116} = \boxed{}$

3) Hallar los siguientes productos.

a) $(3 - 4i) . (5 + 2i) =$ **b)** $(2 - 3i) . (2 + 8i) =$ **c)** $(3 + 5i) . (5 + 3i) . (2 - i) =$

d) $(2 + 5i) . (3 + 7i) =$ **e)** $(3 + 4i) . (4 + 3i) . (2 - 5i) =$ **f)** $-3i . (-8 - i)$

4) Completar con el conjugado y resolver.

a) $(4 + 9i) . \boxed{} = \boxed{}$

b) $\boxed{} . (-4 - 3i) = \boxed{}$

c) $(5 - 2i) . \boxed{} = \boxed{}$

d) $(-3 - i) . \boxed{} = \boxed{}$

5) Calcular las siguientes potencias.

a) $(4 - 3i)^2 =$ **b)** $(-7 - 5i)^2 =$

c) $(5 + 2i)^2 =$ **d)** $(-6 + i)^2 =$

6) Efectuar las siguientes divisiones entre complejos

a) $\dfrac{3 - i}{3 + 2i} =$ d) $\dfrac{2 + 5i}{3 + 2i} =$

b) $\dfrac{1 + 4i}{3 + i} =$ e) $\dfrac{(3 + 4i).(1 - 2i)}{1 + i} =$

c) $\dfrac{2 + 3i}{1 + 2i} =$ f) $\dfrac{(5 - i).(1 - 5i)}{3 + 2i} =$