“Planificación de Clases”

MODALIDAD: Por Plataforma institucional

MATERIA: Matemáticas	**AÑO:** 5°
TURNO: Mañana	**DIVISIONES:** 1°, 2° y 3°

DOCENTES: Mónica Guaymás. Patricia Cano.

CONTACTO:

PROF. MÓNICA GUAYMÁS (5° 1° Y 5° 3°) monicamarcela75g@gmial.com

PROF. PATRICIA CANO (5° 2°) pasantriti@gmail.com

TIEMPO	TEMA A TRABAJAR
2 semanas	Sistemas de ecuaciones de 2x2. Problemas de interpretación .Métodos de resolución

Marco teórico

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones; con dos o más incógnitas (de primer grado) que conforman un problema matemático que consiste en encontrar los valores de las incógnitas para que verifiquen la igualdad.

La forma general de un sistema de ecuaciones lineales es:

Sistema de 2x2: dos ecuaciones con dos incógnitas.

Sistema 2 x 2

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Donde las “a”, “b” y “c” son Números reales y las “x” e “y” son las variables

Resolver un sistema de ecuaciones lineales implica encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen las ecuaciones del sistema. Para ello existen diferentes métodos de los cuales vamos a desarrollar dos:

- **Método de determinantes**
- **Método de Eliminación (Reducción)**

EJEMPLO **Vamos a solucionar el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2×2:**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 20 \rightarrow Ecuación\ 1 \\ x - 2y = 3 \rightarrow Ecuación\ 2 \end{cases}$$

Antes de iniciar con el paso a paso de este método, es pertinente recordar qué es una matriz 2×2 y qué es un determinante.

- Una matriz 2×2 no es más que un arreglo de elementos que posee dos columnas y dos filas

Matriz 2x2.
Dos filas y dos columnas

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Y un determinante de una matriz 2×2 consiste en restar el producto de las diagonales de la matriz:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Veamos que sí es la resta del producto de las diagonales:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \boxed{ad} - bc \qquad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - \boxed{bc}$$

Método de las determinantes (Regla de Cramer)

1. Se prepara la matriz de los coeficientes y se halla el determinante. Identificamos los coeficientes de las incógnitas y construimos la **matriz M** con ellos:

$$\boxed{\begin{matrix} 2x + 3y \\ x - 2y \end{matrix}} \begin{matrix} = 20 \\ = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{matrix}$$

Matriz de los coeficientes.

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & \; y \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calculamos su determinante:

$|M| = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3$

$|M| = -4 - 3 = -7$

Bien, ya tenemos que el determinante de la matriz de coeficientes es **-7**

2. Se prepara la matriz de la incógnita **x,** y se halla el determinante. La matriz de la **incógnita X** es la misma matriz de coeficientes con una diferencia. En lugar de colocar los coeficientes de **X**, se ubican los valores numéricos que quedaron al otro lado de las ecuaciones.

Veamos:

$$\begin{matrix} 2x + 3y = \\ x - 2y = \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} 20 \\ 3 \end{matrix}} \quad \begin{matrix} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{matrix}$$

Matriz de los coeficientes.

$$\boxed{M = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & \; y \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \cancel{2} & 3 \\ \cancel{1} & -2 \end{bmatrix} \end{array}}$$

$$M_x = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 20 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Ya con esto tenemos la **Matriz de X**, y procedemos a calcular su determinante:

$$M_x = \begin{bmatrix} 20 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$|M_x| = 20 \cdot (-2) - 3 \cdot 3$$

$$|M_x| = -40 - 9 = -49$$

El determinante de la **Matriz X** es **-49**

3. Se prepara la matriz de la incógnita **y,** y se halla el determinante. La matriz de la **incógnita Y** es la misma matriz de coeficientes con una diferencia. En lugar de colocar los coeficientes de **Y**, se ubican los valores numéricos que quedaron al otro lado de las ecuaciones.

Veamos:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= \boxed{20} \quad \text{Ecuación 1} \\ x - 2y &= \boxed{3} \quad \text{Ecuación 2} \end{aligned}$$

Matriz de los coeficientes.

$$\begin{array}{ccc} & x & y \\ M = & \begin{bmatrix} 2 & \cancel{3} \\ 1 & \cancel{-2} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M_y = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{20} \\ 1 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

Ya con esto tenemos la **Matriz de Y**, y procedemos a calcular su determinante:

$$M_y = \begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$|M_y| = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 20$$

$$|M_y| = 6 - 20 = -14$$

El determinante de la **Matriz Y** es **-14**

4. Hallamos el valor de las incógnitas.

El **valor de X** va a ser igual al determinante de la **matriz X** dividido en el determinante de la **matriz de coeficientes**:

$$x = \frac{|M_x|}{|M|}$$

El **valor de Y** va a ser igual al determinante de la **matriz Y** dividido en el determinante de la **matriz de coeficientes**:

$$y = \frac{|M_y|}{|M|}$$

Resolvemos:

$$x = \frac{|M_X|}{|M|} = \frac{-49}{-7} = 7 \quad Y = \frac{|M_Y|}{|M|} = \frac{-14}{-7} = 2$$

5. Verificación de la solución del sistema. $\underline{\textit{Conjunto Solución} = (7;2)}$

Reemplazamos los valores obtenidos para cada una de las incógnitas en ambas ecuaciones con la finalidad de verificar que se cumpla la igualdad en ambos casos:

Ecuación 1	Ecuación 2
$2x + 3y = 20$	$x - 2y = 3$
$2(7) + 3(2) = 20$	$7 - 2(2) = 3$
$14 + 6 = 20$	$7 - 4 = 3$
$20 = 20$	$3 = 3$

Se verifica que la solución del sistema si satisface ambas ecuaciones.

- **Video explicativo** → ***https://youtu.be/1sc8_xyV37Y***

Método de Eliminación (Reducción)

El método de eliminación consiste en realizar la sumatoria de ambas ecuación con la finalidad de que alguna de las incógnitas desaparezca en el resultado de dicha operación.

Por lo general, es necesario realizar una serie de pasos pertinentes para que ambas ecuaciones lo permitan.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 20 \rightarrow Ecuación\ 1 \\ x - 2y = 3 \rightarrow Ecuación\ 2 \end{cases}$$

1. **Se preparan las ecuaciones multiplicándolas por los números que convenga. Para ello elegimos arbitrariamente cuál incógnita queremos eliminar; en este caso optamos por eliminar a la variable x.**

Analicemos: en la Ecuación 1, la variable x viene representada por un 2x. Esto implica que para eliminarla al sumar dicha ecuación con la Ecuación 2, esta última debería tener un -2x con el cual cancelarse o eliminarse.

Por lo tanto es pertinente multiplicar la Ecuación 2 por un factor de -2 de la siguiente manera:

$\boxed{2x} + 3y = 20$ Ecuación 1

$x - 2y = 3$ Ecuación 2

Para convertir x en -2x
debo multiplicarlo por -2

Multiplico la Ecuación 2 por -2

$$x - 2y = 3$$

$$(-2)\quad (x - 2y = 3)$$

$-2x + 4y = -6$ Ecuación 2n

Ecuación 2n = Ecuación 2 nueva

2. **Sumamos ambas ecuaciones.**

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 4y = -6 \\ \hline 0 + 7y = 14 \end{array}$$

3. Se resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 4y = -6 \\ \hline 0 + 7y = 14 \end{array}$$

$$y = \frac{14}{7}$$

$$\boxed{y = 2}$$

4. El valor obtenido se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

En este caso elegimos reemplazar en la Ecuación 2

$$\boxed{y = 2}$$

Reemplazo en
Ecuación 2

$$x - 2y = 3$$
$$x - 2(2) = 3$$
$$x - 4 = 3$$
$$x = 3 + 4$$
$$\boxed{x = 7}$$

5. Verificación de la solución del sistema.

Nuestra solución:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 7 \end{array}}$$

Reemplazamos los valores obtenidos para cada una de las incógnitas en ambas ecuaciones con la finalidad de verificar que se cumpla la igualdad en ambos casos:

Ecuación 1	Ecuación 2
$2x + 3y = 20$	$x - 2y = 3$
$2(7) + 3(2) = 20$	$7 - 2(2) = 3$
$14 + 6 = 20$	$7 - 4 = 3$
$20 = 20$	$3 = 3$

Se verifica que la solución del sistema si satisface ambas ecuaciones.

- Video explicativo →https://youtu.be/rTD1Y04GxAg

PROBLEMAS RESUELTOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Resolvemos problemas mediante un sistema de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

Lo importante, en primer lugar, es plantear el sistema de ecuaciones luego, resolvemos detalladamente cada uno de los sistemas que quedan determinados.

Pasos a seguir para plantear y resolver problemas utilizando sistemas de ecuaciones.

1. **Obtener los datos**
2. **Identificar las incógnitas x e y**
3. **Plantear el sistema de dos ecuaciones**
4. **Resolver el sistema.**

EJEMPLO:

Problema 1: Hallar dos números sabiendo que su suma es 15 y su resta es 3.

Incógnitas:

- **X es uno de los números**
- **Y es el otro número**

Ecuaciones:

- **La suma de los números es 15:**

$$x + y = 15$$

- **La resta de los números es 3:**

$$x - y = 3$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema aplicando el método de determinantes

1. **Se calcula el determinante de la la matriz M, determinada por los coeficientes que acompañan a las incógnitas.**

$$|\boldsymbol{M}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) - 1 = \mathbf{-2}$$

2. **Se prepara la matriz de la incógnita x, y se halla el determinante. (proceder como se muestra en el ejemplo)**

$$|\boldsymbol{M_x}| = \begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-15) - 3 = \mathbf{-18}$$

3. **Se prepara la matriz de la incógnita y, y se halla el determinante.**

$$|\boldsymbol{M_y}| = \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 15 = \mathbf{-12}$$

4. **Hallamos el valor de las incógnitas.**

$$\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{M_X}|}{|\boldsymbol{M}|} = \frac{\mathbf{-18}}{\mathbf{-2}} = \mathbf{9} \quad \boldsymbol{Y} = \frac{|\boldsymbol{M_Y}|}{|\boldsymbol{M}|} = \frac{\mathbf{-12}}{\mathbf{-2}} = \mathbf{6}$$

5. **Expresamos el conjunto solución (C.S) y verificamos.**

$$\boldsymbol{C.S} = (\mathbf{9; 6})$$

La suma de los números es 15:

$$\mathbf{9 + 6 = 15}$$

$$\mathbf{15 = 15}$$

La resta de los números es 3:

$$\mathbf{9 - 6 = 3}$$

$$\mathbf{3 = 3}$$

EJEMPLO:

Problema 2: **Un equipo de básquet anotó un total de 55 canastas, obteniendo 125 puntos. ¿Cuántos tiros de campo (2 puntos) y triples (3 puntos) realizaron?**

Incógnitas:

- **X tiros de campos (2 puntos)**
- **Y triples (3 puntos)**

Ecuaciones:

- **Anotó un total de 55 canastas**

$$x + y = 55$$

- **obteniendo 125 puntos.**

$$2x + 3y = 125$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ 2x + 3y = 125 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema aplicando el método de Eliminación

1. **Multiplico por 2 la 1° ecuación**

$$2 \cdot (x + y = 55)$$

$$2x + 2y = 110$$

2. **Resto la nueva ecuación 1 y la ecuación 2**

$$\begin{array}{c} 2x + 2y = 110 \\ 2x + 3y = 125 \\ \hline 0x - y = -15 \end{array}$$

3. **Al anularse la variable x, puedo despejar la variable y**

$$0x - y = -15$$

$$y = 15$$

4. **Utilizo el valor obtenido de la incógnita para obtener el valor de la otra incógnita reemplazando su valor en la ecuación inicial**

$$x + 15 = 55$$
$$x = 55 - 15$$
$$x = 40$$

5. **Expresamos el conjunto solución (C.S) y verificamos.**

$$C.S = (40; 15)$$

- **Anotó un total de 55 canastas**

$$40 + 15 = 55$$

$$55 = 55$$

- **obteniendo 125 puntos.**

$$2 \cdot 40 + 3 \cdot 15 = 125$$

$$80 + 45 = 125$$

$$125 = 125$$

¿Cuántos tiros de campo (2 puntos) y triples (3 puntos) realizaron?

Respuesta: El equipo realizó 40 tiros de campos y 15 triples.

ACTIVIDADES:

1. **Calcular el valor de los siguientes determinantes**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} =$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} =$ **c)** $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix} =$

2. **El par** $(-3{,}2)$ **es solución del sistema** $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - y = -5 \end{cases}$

a) **Verdadero** b) **Falso**

3. **Aplicar el método de determinantes para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Verificar**

a) $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = -1} \\ \mathbf{3x + 4y = 0} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 12} \\ \mathbf{x - y = 1} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \mathbf{10x - 3y = 13} \\ \mathbf{2x - 7y = 9} \end{cases}$

4. **Aplicar el método de Eliminación para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Verificar**

a) $\begin{cases} \mathbf{x + y = 7} \\ \mathbf{2x - y = 5} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 7} \\ \mathbf{4x - 5y = 3} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \mathbf{4x + 3y = 10} \\ \mathbf{5x - 6y = -7} \end{cases}$

4. **Selecciona el enunciado que podría corresponder al sistema.**

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 4y = 32 \end{cases}$$

a) **Un examen consta de un total de 10 preguntas y se puntúan con 4 puntos las acertadas y con menos 2 puntos las erróneas. Al final se ha obtenido un 32 de puntuación en el examen. ¿Cuántas preguntas se han acertado y cuantas se han fallado?**

b) **Tenemos 32 bolas de colores y las repartimos en bolsas de 2 y de 4 bolas cada una. Al final nos quedan 10 bolas sueltas. ¿Cuántas bolsas de cada tipo tenemos?**

c) **En un aparcamiento hay 10 vehículos entre motos y coches. En total hay 32 ruedas, sin contar las de repuesto. ¿Cuántas motos y coches hay en el garaje?**

5. **Resolver las siguientes situaciones planteando el sistema de ecuaciones correspondiente. Utilizar un método a elección.**

a) **Encuentra dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia 6.**

b) **Por la compra de 18 lápices y 35 lapiceras se pagaron $282. Si se hubiesen comprado 25 lápices y 16 lapiceras iguales, se habría pagado $196 ¿cuánto cuesta cada lápiz? ¿y cada lapicera?**

c) **En una granja se crían crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?**

d) **En un hotel hay 67 habitaciones entre dobles y sencillas. Si el número total de camas es 92, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?**