“Planificación de Clases”

MODALIDAD: Por Plataforma institucional

MATERIA: Matemáticas	AÑO: 5°
TURNO: Tarde	DIVISIONES: 1° y 2°

DOCENTES: Claudia Vercellino. Víctor Chocobar.

CONTACTO:

PROF. CLAUDIA VERCELLINO (5° 1°- TT): **profvercellino@gmail.com**

PROF. VÍCTOR CHOCOBAR (5° 2°- TT): **vchocobar5@gmail.com**

TIEMPO	TEMA A TRABAJAR
2 semanas	Sistemas de ecuaciones de 2x2 y 3x3. Métodos de resolución

Marco teórico

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones; con dos o más incógnitas (de primer grado) que conforman un problema matemático que consiste en encontrar los valores de las incógnitas para que verifiquen la igualdad.

La forma general de un sistema de ecuaciones lineales es:

Sistema 2 x 2	Sistema 3 x 3
$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

Donde las “a”, “b”, “c” y “d” son Números Reales y las “x”, “y” y “z” son las Varialbles

- **Sistema de 2x2=** dos ecuaciones con dos incógnitas.
- **Sistema de 3x3=** tres ecuaciones con tres incógnitas

Resolver un sistema de ecuaciones lineales implica encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen las ecuaciones del sistema. Para ello existen diferentes métodos de los cuales vamos a desarrollar dos:

- Método de determinantes
- Método de Gauss

EJEMPLO Vamos a solucionar el siguiente **sistema de ecuaciones lineales 2×2:**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 20 \rightarrow Ecuación\ 1 \\ x - 2y = 3 \rightarrow Ecuación\ 2 \end{cases}$$

Antes de iniciar con el paso a paso de este método, es pertinente recordar qué es una matriz 2×2 y qué es un determinante.

- Una matriz 2×2 no es más que un arreglo de elementos que posee dos columnas y dos filas

Matriz 2x2.
Dos filas y dos columnas

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Y un determinante de una matriz 2×2 consiste en restar el producto de las diagonales de la matriz:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Veamos que sí es la resta del producto de las diagonales:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \boxed{ad} - bc \qquad \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - \boxed{bc}$$

<u>**Método de las determinantes (Regla de Cramer)**</u>

1. Se prepara la matriz de los coeficientes y se halla el determinante. Identificamos los coeficientes de las incógnitas y construimos la **matriz M** con ellos:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 20 \quad \text{Ecuación 1} \\ x - 2y &= 3 \quad \text{Ecuación 2} \end{aligned}$$

Matriz de los coeficientes.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ M = & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calculamos su determinante:

$|M| = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3$

$|M| = -4 - 3 = -7$

Bien, ya tenemos que el determinante de la matriz de coeficientes es **-7**

2. Se prepara la matriz de la incógnita **x,** y se halla el determinante. La matriz de la **incógnita X** es la misma matriz de coeficientes con una diferencia. En lugar de colocar los coeficientes de **X**, se ubican los valores numéricos que quedaron al otro lado de las ecuaciones.

Veamos:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= \boxed{20} \quad \text{Ecuación 1} \\ x - 2y &= \boxed{3} \quad \text{Ecuación 2} \end{aligned}$$

Matriz de los coeficientes.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ M = & \begin{bmatrix} \cancel{2} & 3 \\ \cancel{1} & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M_x = \begin{bmatrix} 20 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Ya con esto tenemos la **Matriz de X**, y procedemos a calcular su determinante:

$$M_x = \begin{bmatrix} 20 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$|M_x| = 20 \cdot (-2) - 3 \cdot 3$$

$$|M_x| = -40 - 9 = -49$$

El determinante de la **Matriz X** es **-49**

3. Se prepara la matriz de la incógnita **y,** y se halla el determinante. La matriz de la **incógnita Y** es la misma matriz de coeficientes con una diferencia. En lugar de colocar los coeficientes de **Y**, se ubican los valores numéricos que quedaron al otro lado de las ecuaciones.

Veamos:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= \boxed{20} \quad \text{Ecuación 1} \\ x - 2y &= \boxed{3} \quad \text{Ecuación 2} \end{aligned}$$

Matriz de los coeficientes.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ M = & \begin{bmatrix} 2 & \cancel{3} \\ 1 & \cancel{-2} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M_y = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{20} \\ 1 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

Ya con esto tenemos la **Matriz de Y**, y procedemos a calcular su determinante:

$$M_y = \begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$|M_y| = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 20$$

$$|M_y| = 6 - 20 = -14$$

El determinante de la **Matriz Y** es **-14**

4. Hallamos el valor de las incógnitas.

El **valor de X** va a ser igual al determinante de la **matriz X** dividido en el determinante de la **matriz de coeficientes**:

$$x = \frac{|M_x|}{|M|}$$

El **valor de Y** va a ser igual al determinante de la **matriz Y** dividido en el determinante de la **matriz de coeficientes**:

$$y = \frac{|M_y|}{|M|}$$

Resolvemos:

$$x = \frac{|M_X|}{|M|} = \frac{-49}{-7} = 7 \quad Y = \frac{|M_Y|}{|M|} = \frac{-14}{-7} = 2$$

5. Verificación de la solución del sistema. $\underline{\textit{Conjunto Solución} = (7; 2)}$

Reemplazamos los valores obtenidos para cada una de las incógnitas en ambas ecuaciones con la finalidad de verificar que se cumpla la igualdad en ambos casos:

Ecuación 1	Ecuación 2
$2x + 3y = 20$	$x - 2y = 3$
$2(7) + 3(2) = 20$	$7 - 2(2) = 3$
$14 + 6 = 20$	$7 - 4 = 3$
$20 = 20$	$3 = 3$

Se verifica que la solución del sistema si satisface ambas ecuaciones.

- **Video explicativo** → $\boldsymbol{https://youtu.be/1sc8\_xyV37Y}$

Método de Eliminación (Reducción)

El método de eliminación consiste en realizar la sumatoria de ambas ecuación con la finalidad de que alguna de las incógnitas desaparezca en el resultado de dicha operación.

Por lo general, es necesario realizar una serie de pasos pertinentes para que ambas ecuaciones lo permitan.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 20 \rightarrow \text{Ecuación } 1 \\ x - 2y = 3 \rightarrow \text{Ecuación } 2 \end{cases}$$

1. **Se preparan las ecuaciones multiplicándolas por los números que convenga. Para ello elegimos arbitrariamente cuál incógnita queremos eliminar; en este caso optamos por eliminar a la variable x.**

Analicemos: en la Ecuación 1, la variable x viene representada por un 2x. Esto implica que para eliminarla al sumar dicha ecuación con la Ecuación 2, esta última debería tener un -2x con el cual cancelarse o eliminarse.

Por lo tanto es pertinente multiplicar la Ecuación 2 por un factor de -2 de la siguiente manera:

$\boxed{2x} + 3y = 20$ Ecuación 1

$x - 2y = 3$ Ecuación 2

Para convertir x en -2x
debo multiplicarlo por -2

Multiplico la Ecuación 2 por -2

$$x - 2y = 3$$

$$(-2)\quad (x - 2y = 3)$$

$$-2x + 4y = -6 \quad \text{Ecuación 2n}$$

Ecuación 2n = Ecuación 2 nueva

2. **Sumamos ambas ecuaciones.**

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 4y = -6 \\ \hline 0 + 7y = 14 \end{array}$$

3. Se resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 4y = -6 \\ \hline 0 + 7y = 14 \end{array}$$

$$y = \frac{14}{7}$$

$$\boxed{y = 2}$$

4. El valor obtenido se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

En este caso elegimos reemplazar en la Ecuación 2

$$\boxed{y = 2}$$

Reemplazo en
Ecuación 2

$$x - 2y = 3$$

$$x - 2(2) = 3$$

$$x - 4 = 3$$

$$x = 3 + 4$$

$$\boxed{x = 7}$$

5. Verificación de la solución del sistema.

Nuestra solución:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 7 \end{array}}$$

Reemplazamos los valores obtenidos para cada una de las incógnitas en ambas ecuaciones con la finalidad de verificar que se cumpla la igualdad en ambos casos:

Ecuación 1	Ecuación 2
$2x + 3y = 20$	$x - 2y = 3$
$2(7) + 3(2) = 20$	$7 - 2(2) = 3$
$14 + 6 = 20$	$7 - 4 = 3$
$20 = 20$	$3 = 3$

Se verifica que la solución del sistema si satisface ambas ecuaciones.

- **Video explicativo →https://youtu.be/rTD1Y04GxAg**

Método de las determinantes (Regla de Cramer)

EJEMPLO Vamos a solucionar el siguiente **sistema de ecuaciones lineales 3×3:**

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

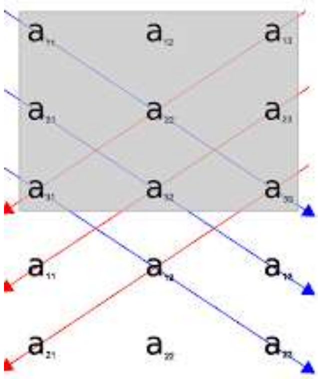
1. **Se cambia el sistema de ecuaciones de 3x3 a la matriz de los coeficientes. La Matriz es la tabla de números con los coeficientes de las incógnitas respetando las filas y las columnas correspondientes.**

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se debe calcular los determinantes:

Para calcular el valor del determinante de una matriz cuadrada de 3x3 se aplica un método conocido como la Regla de Sarrus que consiste en:

- **Escribir a continuación de la tercera fila, la primera y la segunda, en ese orden.**
- **Calcular la suma de los productos de los elementos de las diagonales marcadas con azul**
- **Restar a la suma anterior la suma de los productos de los elementos de las diagonales marcada con rojo.**
- **Imagen ilustrativa:**



Veamos:

$$|M| = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = [-1+6+4]-[-1-6-4] = 9-(-11) = 9+11 = 20$$

Bien, ya tenemos que el determinante de la matriz de coeficientes es 20

2. **Se prepara la matriz de la incógnita x, y se halla el determinante. La matriz de la incógnita X es la misma matriz de coeficientes con una diferencia. En lugar de colocar los coeficientes de X, se ubican los valores numéricos que quedaron al otro lado de las ecuaciones. (como se muestra en el ejemplo del sistema de 2x2)**

$$|M_x| = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = (-5-3+0)-(0-30+2) = -8-(-28) = -8+28 = 20$$

El determinante de la **Matriz X** es **20**

3. Se prepara la matriz de la incógnita **y,** y se halla el determinante. La matriz de la **incógnita Y** es la misma matriz de coeficientes con una diferencia. En lugar de colocar los coeficientes de **Y**, se ubican los valores numéricos que quedaron al otro lado de las ecuaciones. (como se muestra en el ejemplo del sistema de 2x2)

$$|M_Y| = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = (-1+0-10)-(-1+0+10) = -11-9 = -20$$

El determinante de la **Matriz Y** es **-20**

4. Se prepara la matriz de la incógnita **Z,** y se halla el determinante. La matriz de la **incógnita Z** es la misma matriz de coeficientes con una diferencia. En lugar de colocar los coeficientes de **Z**, se ubican los valores numéricos que quedaron al otro lado de las ecuaciones.

$$|M_Z| = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = (0+30+2)-(-5-3+0) = 32-(-8) = 32+8 = 40$$

El determinante de la **Matriz Z** es 40

5. Hallamos el valor de las incógnitas.

- El **valor de X** va a ser igual al determinante de la **matriz X** dividido en el determinante de la **matriz de coeficientes**:

$$x = \frac{|M_X|}{|M|}$$

- El **valor de Y** va a ser igual al determinante de la **matriz Y** dividido en el determinante de la **matriz de coeficientes**:

$$y = \frac{|M_y|}{|M|}$$

- El **valor de Y** va a ser igual al determinante de la **matriz Y** dividido en el determinante de la **matriz de coeficientes**:

$$z = \frac{|M_z|}{|M|}$$

Resolvemos:

$$x = \frac{|M_X|}{|M|} = \frac{20}{20} = 1 \quad y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{-20}{20} = -1 \quad z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{40}{20} = 2$$

6. Verificación de la solución del sistema. $\underline{Conjunto\ Solución = (1; -1; 2)}$

Reemplazamos los valores obtenidos para cada una de las incógnitas en las ecuaciones con la finalidad de verificar que se cumpla la igualdad en ambos casos:

1° ecuación

$$\begin{gathered} x - 2y + z = 5 \\ 1 - 2 \cdot (-1) + 2 = 5 \\ 1 + 2 + 2 = 5 \\ 5 = 5 \end{gathered}$$

2° ecuación

$$\begin{gathered} 2x - y - 2z = -1 \\ 2 \cdot 1 - (-1) - 2 \cdot 2 = -1 \\ 2 + 1 - 4 = -1 \\ -1 = -1 \end{gathered}$$

3° ecuación

$$\begin{gathered} x + 3y + z = 0 \\ 1 + 3 \cdot (-1) + 2 = 0 \\ 1 - 3 + 2 = 0 \\ 0 = 0 \end{gathered}$$

El Método de Gauss

El método de gauss, es una generalización del método de reducción, que utilizamos para eliminar una incógnita en los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineal en otro escalonado, es decir "hacemos cero" por debajo de la diagonal principal de manera que; la última ecuación tiene una única incógnita, la del medio dos incógnitas y la primera tres incógnitas.

Existen procedimientos para modificar el sistema y transformarlo en otro equivalente al dado, dichos procedimientos son:

- Multiplicamos una ecuación por un número distinto de cero.
- Sumar a una ecuación otra.
- Intercambiar ecuaciones.

Para trabajar mejor utilizamos sólo los números (coeficientes y término independiente) y trabajamos con una estructura de matriz.

EJEMPLO

$$\left.\begin{array}{cccc} +x & +y & +z & = 2 \\ 3x & -2y & -z & = 4 \\ -2x & +y & +2z & = 2 \end{array}\right\}$$

Utilizamos los coeficientes y los términos independientes y realizamos una matriz:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +2 \\ +3 & -2 & -1 & +4 \\ -2 & +1 & +2 & +2 \end{pmatrix}$$

Necesitamos hacer ceros en los números destacados en la matriz anterior.

Primeras transformaciones, deseamos realizar los ceros de la primera columna:

Primer paso, transformar la segunda fila,

1. **Fila uno** multiplicada por -3

$$-3.(+1\ +1\ +1\ +2) = -3\ -3\ -3 - 6$$

2. **Le sumo la fila 2.**

$$\begin{array}{cccc} -3 & -3 & -3 & -6 \\ +3 & -2 & -1 & +4 \\ \hline 0 & -5 & -4 & -2 \end{array}$$

Segundo paso, transformar la tercera fila,

1. **Fila uno** multiplicada por +2.

$$+2.(+1\ +\ 1 + 1\ +2\ ) = +2\ +2\ +2\ +4$$

2. **Le sumo la fila 3.**

$$\begin{array}{cccc} +2 & +2 & +2 & +4 \\ -2 & +1 & +2 & +2 \\ \hline 0 & +3 & +4 & +6 \end{array}$$

Así, la matriz resultante sería:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & +3 & +4 & +6 \end{pmatrix}$$

Segundas transformaciones, deseamos realizar el ceros de la segunda columna:

Para ello, <u>sólo utilizamos la segunda y tercera fila</u>:

1. **Fila uno** se mantiene.
2. **Fila dos** se multiplica por 3.

$$+3.(0\ -5\ -4\ -2) = +0\ -15\ -12\ -6$$

3. Fila tres se multiplica por 5.

$$+5.(0\ +3\ +4\ +6) = 0\ +15\ +20\ +30$$

4. Sumo la fila dos y tres transformadas.

$$\begin{array}{cccc} 0 & -15 & -12 & -6 \\ 0 & +15 & +20 & +30 \\ \hline 0 & 0 & +8 & +24 \end{array}$$

De esta manera, el sistema resulta:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & +8 & +24 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 2 \\ & -5y & -4z & = -2 \\ & & +8z & = +24 \end{array}\right\}$$

Siendo la solución:

$$8z = 24 \Rightarrow z = \frac{24}{8} =$$

$$z = 3$$

Sustituimos el valor de “z” en la segunda ecuación y obtenemos el valor de “y”:

$$-5y - 4.3 = -2$$

$$-5y = -2 + 12$$

$$y = \frac{10}{-5}$$

$$y == -2$$

Sustituimos el valor de “z” e “y” en la primera ecuación y obtenemos “x”:

$$x + (-2) + 3 = +2$$

$$x = +2 - 3 + 2$$

$$x = 1$$

Para finalizar, se expresa el conjunto solución y luego se verifica.

Conjunto solución= $(1; -2; 3)$

Verificación:

$$\left.\begin{array}{cccc} +x & +y & +z & = 2 \\ 3x & -2y & -z & = 4 \\ -2x & +y & +2z & = 2 \end{array}\right\}$$

$$1 + (-2) + 3 = 2$$

$$1 - 2 + 3 = 2$$

$$2 = 2$$

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) - 3 = 4$$

$$3 + 4 - 3 = 4$$

$$4 = 4$$

$$-2 \cdot 1 + (-2) + 2 \cdot 3 = 2$$

$$-2 - 2 + 6 = 2$$

$$2 = 2$$

ACTIVIDADES:

1. **Calcular el valor de los siguientes determinantes**

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$ **e)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$

2. **Aplicar a cada matriz la transformación indicada.**

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

I. Multiplicar por 4 la fila 2.

II. Restar la fila 1 y la nueva fila 2

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

I. Multiplicar la fila 1 por -2

II. Sumar la nueva fila 1 con fila 3

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

I. Multiplicar por 3 la fila 2.

II. Sumar la nueva fila 2 y la fila 3

3. **Aplicar el método de determinantes para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Verificar**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 10x - 3y = 13 \\ 2x - 7y = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20 \\ 3x - 5y - z = -10 \\ -x + 2y - 3z = -6 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 5x - 2y + z = 24 \\ 2x + 5y - 2z = -14 \\ x - 4y + 3z = 26 \end{cases}$

4. **Aplicar el método de Gauss para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Verificar**

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 5x - 6y = -7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 5x - 2y + z = 24 \\ 2x + 5y - 2z = -14 \\ x - 4y + 3z = 26 \end{cases}$